Quantenlogische Interpretation orthokomplementärer quasimodularer Verbände

P. MITTELSTAEDT

Institut für Theoretische Physik der Universität zu Köln

(Z. Naturforsch. **25 a**, 1773—1778 [1970]; eingegangen am 10. September 1970)

In dem orthokomplementären, quasimodularen Verband der Teilräume des Hilbert-Raumes lassen sich die *Relationen* der *Implikation* und *Kommensurabilität* als *Operationen* definieren. Dadurch wird es möglich, diesen Verband als einen *quantenlogischen Aussagenkalkül* zu interpretieren. Die Begriffe Implikation und Kommensurabilität stimmen dabei überein mit den im Rahmen der Logik *operativ* definierten entsprechenden Begriffen.

Einleitung

Die Teilräume des Hilbert-Raumes bilden einen orthokomplementären, und bei endlichen Dimensionszahlen der Teilräume modularen Verband, der zuerst von BIRKHOFF und v. NEUMANN[1] untersucht wurde. Dieser Verband läßt sich als ein quantenlogischer Aussagekalkül interpretieren, wenn man den von LORENZEN vorgeschlagenen operativen Ansatz[2] geringfügig verallgemeinert, d.h. einen verallgemeinerten Begriff von operativer Logik verwendet, der auch als operative Quantenlogik bezeichnet wird[3]. Die Möglichkeit, einen orthokomplementären modularen Verband als Aussagenkalkül zu interpretieren, hängt wesentlich davon ab, daß sich in diesem Verband die Halbordnungsrelation auch als zweistellige Operation definieren läßt, worauf zuerst KUNSEMÜLLER hingewiesen hat[4].

Im allgemeinen Fall ist der Verband L_q der Teilräume des Hilbert-Raumes zwar noch orthokomplementär, nicht aber modular. In den Arbeiten von JAUCH[5,6], PIRON[7] und KAMBER[8] wurde gezeigt, daß sich statt der Modularität schwächere Bedingungen angeben lassen, die in L_q immer erfüllt sind. Die Äquivalenz der Bedingungen von JAUCH, PIRON[5,6,7] und von KAMBER[8] wird in Lemma I der vorliegenden Arbeit bewiesen. Verbände, die diese Bedingungen erfüllen, bezeichnen wir im Anschluß an Kamber als quasimodular.

In Verallgemeinerung der Ergebnisse bei modularen Verbänden kann gezeigt werden, daß sich auch in quasimodularen Verbänden die Halbordnungsrelation als zweistellige Operation definieren läßt (Theorem I). Das gleiche gilt für die von Kamber definierte Relation K, die auf Grund ihrer formalen Eigenschaften als Kommensurabilität bezeichnet werden soll (Theorem II). Auf Grund dieser Ergebnisse ist es möglich, den orthokomplementären und quasimodularen Verband L_q der Teilräume des Hilbert-Raumes als einen Aussagenkalkül im Sinne der operativen Quantenlogik zu interpretieren. Da nämlich die Halbordnungsrelation bzw. die entsprechende Operation alle Bedingungen erfüllt, die im Sinne der operativen Logik von der Implikation bzw. Subjunktion verlangt werden müssen (Theorem III), läßt sich L_q als ein Aussagenkalkül im Sinne der gewöhnlichen operativen Logik deuten. Da darüber hinaus auch die Relation K bzw. die entsprechende zweistellige Operation alle Eigenschaften des im Rahmen der operativen Quantenlogik definierten Begriffs der Kommensurabilität besitzt (Theorem IV), so läßt sich L_q sogar als ein Aussagenkalkül im Sinne der operativen Quantenlogik interpretieren.

§ 1. Der Verband der Teilräume des Hilbert-Raumes

a) Die abgeschlossenen Linearmannigfaltigkeiten oder Teilräume des Hilbert-Raumes H, die wir im folgenden mit $a, b, c, \ldots$ bezeichnen, bilden hinsichtlich der zweistelligen Relation R, die durch $a \leqq b$ gegeben ist, eine Halbordnung *. Der aus zwei

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. P. MITTELSTAEDT, Institut für Theoretische Physik der Universität Köln, *D-5000 Köln 41*, Universitätsstraße 14.

1 G. BIRKHOFF u. J. v. NEUMANN, Ann. Math. **37**, 823 [1936].
2 P. LORENZEN, Mathematik, B-I-Hochschultaschenbücher Bd. 25, Mannheim 1962.
3 P. MITTELSTAEDT, Philosophische Probleme der modernen Physik, Kap. VI, 3. Aufl., Mannheim 1968.
4 H. KUNSEMÜLLER, Philos. Natur. VIII (1964), S. 363.
5 J. M. JAUCH, Foundations of Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading Mass. 1968.
6 J. M. JAUCH u. C. PIRON, Helv. Phys. Acta **36**, 827 [1963].
7 C. PIRON, Helv. Phys. Acta **37**, 439 1964].
8 F. KAMBER, Math. Annalen **158**, 158 [1965].
* Hinsichtlich der Einzelheiten und Beweise der im folgenden aufgeführten bekannten Tatsachen vgl. etwa J. M. JAUCH, Foundations of Quantum Mechanics[5].

Teilräumen a und b gebildete Durchschnitt $a \wedge b$ ist die bezüglich der Relation R untere Grenze (Infinum) der Elemente a und b. Der von den beiden Teilräumen a und b aufgespannte Teilraum $a \vee b$ ist die bezüglich R obere Grenze (Supremum) von a und b. Die Teilräume des Hilbert-Raumes bilden daher hinsichtlich der Relation R und der Operationen $a \wedge b$ und $a \vee b$ einen Verband, dessen Nullelement $\mathbf{0}$ die Nullmenge und dessen Einselement $\mathbf{1} = H$ ist[9].

Den Verband der Teilräume des Hilbert-Raumes bezeichnen wir im folgenden mit L_q. Über die bereits genannten Eigenschaften hinaus ist L_q *σ-vollständig*, d.h. es gibt zu jeder (abzählbaren) nicht leeren Teilmenge von L_q ein Infinum und ein Supremum. Weiterhin ist L_q *atomar*, d.h. zu jedem $x \in L_q$ gibt es ein Atom $a \leqq x$ mit der Eigenschaft, daß aus $\mathbf{0} \leqq z \leqq a$ folgt $z = a$ oder $z = \mathbf{0}$. Die für die folgenden Überlegungen wichtigsten, bisher noch nicht genannten Eigenschaften des Verbandes L_q sind:

L_q ist orthokomplementär, d.h. es gibt eine Abbildung $a \rightarrow a' \in L_q$, derart daß

$$\begin{aligned} (a')' &= a, \\ a \wedge a' &= \mathbf{0}, \\ a \leqq b &\Leftrightarrow b' \leqq \alpha' \end{aligned} \tag{1}$$

gilt. Für Orthokomplemente gilt daher in Verbindung mit $\wedge$ und $\vee$

$$\begin{aligned} (a \wedge b)' &= a' \vee b', \\ (a \vee b)' &= a' \wedge b', \end{aligned} \tag{2}$$

woraus insbesondere wegen $\mathbf{0}' = \mathbf{1}$

$$a \vee a' = \mathbf{1} \tag{3}$$

folgt. Ist a ein Teilraum von H, so ist a' der zu a total senkrechte Unterraum.

Der Verband L_q ist weiter *quasimodular*[8], d.h. es gilt

$$\alpha \leqq \beta, \ \gamma \leqq \beta' \Rightarrow \beta \wedge (\alpha \vee \gamma) = \alpha. \tag{4}$$

Die Quasimodularität ist eine Abschwächung der Modularität die für den Verband L_q nicht vorhanden ist[1,5]. Die Quasimodularität ist andererseits in der Klasse der orthokomplementären Verbände eine echte Bedingung[8], so daß für die folgenden Klassen von Verbänden echte Inklusionen gelten:

$$\{\text{o.-Kompl., mod. V.}\} \subset \{\text{o.-Kompl., quasim. V.}\} \subset \{\text{o.-Kompl. V.}\}.$$

[9] G. Birkhoff, Lattice Theory, Ann. Math. Soc. Coll. Publ. XXV, rev. Ed. 1961.

b) Jauch und Piron[5,6,7] haben gezeigt, daß in dem Verband L_q auch durch die folgende, als *schwache Modularität* bezeichnete Bedingung

$$\alpha \leqq \beta \Rightarrow \alpha = \beta \wedge (\alpha \vee \beta') \tag{5}$$

bewiesen werden kann. Wie die Quasimodularität ist auch (5) eine echte Abschwächung der Modularität und eine echte Bedingung für orthokomplementäre Verbände[5]. Es gilt darüber hinaus das folgende:

Lemma I

In orthokomplementären Verbänden sind die Bedingungen der *Quasimodularität* (4) und der *schwachen Modularität* (5) äquivalent.

Beweis:

1. (4) $\Rightarrow$ (5): Setzt man in (4) speziell $\gamma = \beta'$, so folgt

$$\alpha \leqq \beta \Rightarrow \alpha = \beta \wedge (\alpha \vee \beta') \quad \text{also (5)}.$$

2. (5) $\Rightarrow$ (4): Setzt man voraus $\alpha \leqq \beta$, $\gamma \leqq \beta'$ so ist

$$\alpha \vee \gamma \leqq \alpha \vee \beta',$$

woraus zusammen mit (5)

$$\beta \wedge (\alpha \vee \gamma) \leqq \beta \wedge (\beta' \vee \alpha) = \alpha$$

folgt. Weiter ist wegen $\alpha \leqq \beta$

$$\alpha \leqq \beta \wedge (\alpha \vee \gamma),$$

so daß

$$\alpha \leqq \beta, \ \gamma \leqq \beta' \Rightarrow \alpha = \beta \wedge (\alpha \vee \gamma) \quad \text{folgt.}$$

Weitere, bisher nicht aufgeführte Eigenschaften des Verbandes L_q der Teilräume des Hilbert-Raumes werden im folgenden nicht gebraucht.

Wir verstehen daher im folgenden unter L_q einen σ-vollständigen, atomaren, orthokomplementären und quasimodularen Verband.

c) In einem orthokomplementären Verband läßt sich durch

$$a K b \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge b') = a \tag{6}$$

eine zweistellige Relation K, die Kommensurabilität, definieren. Wenn für zwei Elemente a und b des Verbandes die Relation $a K b$ gilt, so sagt man „a ist kommensurabel mit b". Kamber[8] hat gezeigt, daß in dem orthokomplementären und quasimodularen Verband L_q die Relation K symmetrisch ist, d.h.

$$a K b \Leftrightarrow b K a \tag{7}$$

gilt. Auf Grund des oben bewiesenen Lemmas I ist weiter (4) und (5) äquivalent. Wegen (1) und (2) gilt daher in L_q auch

$$a \leqq b \Rightarrow b = (b \wedge a) \vee (b \wedge a'), \qquad (5^+)$$

so daß die Relation R in K enthalten ist, d.h. die Beziehung

$$R \subseteqq K \subseteqq L_q \times L_q \qquad (8)$$

besteht. Mehrere, paarweise kommensurable Elemente aus L_q erzeugen weiter einen Boolschen Unterverband. Es gilt das **Lemma II:**[8]

α) Eine Teilmenge $S \subseteqq L_q$ mit $S \times S \subseteqq K$ erzeugt in L_q einen Boolschen Verband $B(S)$,

β) Ist $B \subseteqq L_q$ ein Boolscher Unterverband von L_q, so ist $B \times B \subseteqq K$.

Umgekehrt ist durch die Bedingungen (7) und (8) sowie durch die in Lemma II genannten beiden Eigenschaften (α) und (β) die Relation K vollständig bestimmt. Denn für eine zweistellige Relation $K' \subseteqq L_q \times L_q$, die den Bedingungen (7), (8), (α) und (β) genügt, gilt $K' = K$.

§ 2. Implikation und Kommensurabilität

In einem orthokomplementären, quasimodularen Verband L_q lassen sich die Relationen R und K als zweistellige Operationen definieren. Diese Tatsache ist von Bedeutung, wenn man den Verband L_q als einen quantenlogischen Aussagenkalkül interpretieren will (§ 3). Wir behandeln in diesem Abschnitt jedoch zunächst die rein verbandstheoretischen Zusammenhänge.

Theorem I:

In einem Verband L_q läßt sich die durch $a \leqq b$ gegebene Relation R als zweistellige Operation, die Implikation $b \multimap a$ definieren, derart daß

$$\mathbf{1} \leqq b \multimap a \Leftrightarrow a \leqq b \qquad (9)$$

gilt. Dabei ist

$$b \multimap a = a' \vee (a \wedge b). \qquad (10)$$

Bemerkung:

Die Existenz einer zweistelligen Operation $b \multimap a$, die (9) befriedigt, ist wohlbekannt für orthokomplementäre, distributive Verbände[9] und für orthokomplementäre modulare Verbände[4]. Der Verband der Teilräume des Hilbert-Raumes ist jedoch weder distributiv noch modular[1, 5]. Will man diesen Verband als einen Aussagenkalkül interpretieren, so ist es erforderlich, die Existenz einer Implikationsoperation $b \multimap a$ unter der schwächeren Voraussetzung der Quasimodularität nachzuweisen.

Beweis:

1. $\Leftarrow$ Sei $a \leqq b$, dann ist

$$a \wedge b = a,$$

also $a' \vee (a \wedge b) = a' \vee a = \mathbf{1}$

und daher $\mathbf{1} \leqq b \multimap a$.

Für diesen Teil des Beweises ist die Quasimodularität nicht erforderlich.

2. $\Rightarrow$ Sei $\mathbf{1} \leqq b \multimap a = a' \vee (a \wedge b)$,

dann ist $a \leqq a' \vee (a \wedge b)$

und $a \leqq a \wedge (a' \vee (a \wedge b)) \leqq a$,

also $a = a \wedge (a' \vee (a \wedge b))$.

Setzt man in (4) $\alpha = a \wedge b$, $\beta = a$ und $\gamma = \alpha'$, so sind die Vorderformeln von (4) identisch erfüllt und es gilt

$$a \wedge (a' \vee (a \wedge b)) = a \wedge b,$$

also $a = a \wedge (a' \vee (a \wedge b)) = a \wedge b \leqq b$

und damit $a \leqq b$.

Die Verwendung des quasimodularen Gesetzes in diesem Beweis führt unmittelbar auf das für die aussagenlogische Interpretation von L_q wichtige verbandstheoretische Analogon des modus ponens.

Korollar I

In einem Verband L_q gilt

$$a \wedge b \multimap a \leqq b. \qquad (11)$$

Beweis: Setzt man in (4) wieder $\alpha = a \wedge b$, $\beta = a$ und $\gamma = a'$ so folgt

$$a \wedge (a' \vee (a \wedge b)) = a \wedge b,$$

woraus wegen $b \multimap a = a' \vee (a \wedge b)$ folgt

$$a \wedge (b \multimap a) = a \wedge b \leqq b.$$

Ähnliche Beziehungen wie zwischen der Relation R und der Operation der Implikation lassen sich auch für die Relation der Kommensurabilität und einer entsprechenden zweistelligen Operation herstellen, d.h. es gibt ein — hier mit $a \circ b$ bezeichnetes — Verbandselement, das genau dann gleich dem Einselement $\mathbf{1}$ des Verbandes ist, wenn die beiden Elemente a und b kommensurabel sind. Wir fassen dieses Ergebnis zusammen in folgendem

Theorem II

In einem Verband L_q läßt sich die durch aKb gegebene Relation K der Kommensurabilität als zweistellige Operation $a \circ b$ definieren, derart daß

$$\mathbf{1} \leqq a \circ b \Leftrightarrow aKb \tag{12}$$

gilt. Dabei ist

$$a \circ b = (a \wedge b) \vee (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) \vee (a' \wedge b'). \tag{13}$$

Beweis: Nach dem oben bewiesenen Lemma ist (4) äquivalent zu (5). In einem orthokomplementären Verband, in dem (5) gilt, ist aber nach Ref. [7] Theorem VII.5 die Relation aKb notwendig und hinreichend für $\mathbf{1} \leqq a \circ b$.

Mit Hilfe der Operation $a \circ b$ läßt sich der folgende, für die aussagenlogische Interpretation des Verbandes L_q wichtige Satz beweisen.

Korollar II:

In einem Verband L_q gilt

$$a \wedge (a \circ b) \leqq a \neg b. \tag{14}$$

Beweis: Setzt man in (4)

$$\alpha = (a \wedge b) \vee (a \wedge b'), \quad \beta = a$$

und

$$\gamma = (a' \wedge b) \vee (a' \wedge b'),$$

so sind die Vorderformeln von (4) identisch erfüllt, und es gilt

$$a \wedge \{[(a \wedge b) \vee (a \wedge b')] \vee [(a' \wedge b) \vee (a' \wedge b')]\} = \alpha.$$

Da weiter

$$\alpha = (a \wedge b) \vee (a \wedge b') \leqq \neg b \vee (a \wedge b),$$

so folgt unter Verwendung der expliziten Form von $b \neg a$ und $a \circ b$

$$a \wedge (a \circ b) \leqq a \neg b.$$

§ 3. Quantenlogische Interpretation des Verbandes L_q

Um den Verband L_q der Teilräume des Hilbert-Raumes als einen Aussagenkalkül interpretieren zu können, beachten wir, daß sich die Verbandselemente $a, b, c, \ldots$ als quantenmechanische Aussagen deuten lassen. Um auch die in L_q erklärten Relationen und Operationen logisch — und das heißt hier quantenlogisch — zu interpretieren, gehen wir aus von der operativen Quantenlogik und den dort operativ definierten Relationen und Operationen zwischen Aussagen. In dieser operativen Quantenlogik gelten für die Implikation $a \rightarrow b$ zweier Aussagen zunächst die für eine Halbordnung gültigen Beziehungen. Die Konjunktion $a \wedge b$ bzw. die Disjunktion $a \vee b$ sind weiter bezüglich der Halbordnung das Infimum bzw. das Supremum der Elemente a und b, so daß die Aussagen hinsichtlich der Relation $a \rightarrow b$ und der Operationen $a \wedge b$ bzw. $a \vee b$ einen Verband bilden. Die wahre Aussage V bzw. die falsche Aussage Λ, für die hinsichtlich aller Aussagen $a \rightarrow \mathrm{V}$ bzw. $\Lambda \rightarrow a$ gilt, sind das Eins- bzw. das Null-Element des Verbandes.

Damit ist jedoch nicht gesagt, daß ein beliebiger Verband mit $\mathbf{0}$- und $\mathbf{1}$-Element, dessen Elemente sich als Aussagen deuten lassen, als ein Aussagenkalkül interpretiert werden kann. In der operativen Quantenlogik gelten nämlich für die Implikation noch die beiden, über die Halbordnung hinaus gehenden Beziehungen

$$a \wedge (a \rightarrow b) \rightarrow b, \tag{15}$$

$$a \wedge c \rightarrow b \Rightarrow (a \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b), \tag{16}$$

die sich zunächst nicht verbandstheoretisch formulieren lassen [3].

Man kann jedoch eine Aussage

$$b \neg a \underset{\text{def}}{=} a \rightarrow b$$

definieren, für die wegen (15) und (16)

$$\mathrm{V} \rightarrow b \neg a \Leftrightarrow a \rightarrow b \tag{17}$$

gilt, die also genau dann wahr ist, wenn die Beziehung $a \rightarrow b$ besteht. Mit Hilfe dieser *Subjunktion* $b \neg a$, deren Definition sich wegen (17) eliminieren läßt, lassen sich auch die iterierten Implikationen (15) und (16) auf einfache Implikationen zurückführen, und somit verbandstheoretisch formulieren**.

In dem Verband L_q gibt es nach Theorem I ein durch (10) definiertes Verbandselement $b \neg a = a' \vee (a \wedge b)$, für das die zu (17) analoge verbandstheoretische Beziehung (9) gilt. Darüber hinaus gelten für dieses Element $b \neg a$ die zu (15) und (16) analogen verbandstheoretischen Beziehungen, d.h. es gilt das

** Eine völlig analoge Problematik findet man in der gewöhnlichen operativen Logik. Statt (16) gilt dort allerdings die stärkere Beziehung $a \wedge c \rightarrow b \Rightarrow c \rightarrow (a \rightarrow b)$, weshalb die Subjunktion $b \neg a$ dort verbandstheoretisch gesehen das zu b relative Pseudokomplement von a ist. Der quantenlogische Aussagenverband ist jedoch wesentlich nichtdistributiv, weshalb $b \neg a$ hier nicht ein relatives Pseudokomplement ist. Vgl. hierzu Ref. [3].

Theorem III

In dem Verband L_q gelten für $b \neg a = a' \vee (a \wedge b)$ die beiden Beziehungen

$$a \wedge b \neg a \leqq b\,, \tag{15+}$$

$$a \wedge c \leqq b \Rightarrow c \neg a \leqq b \neg a\,. \tag{16+}$$

Beweis:

(15+) ist äquivalent zu dem oben bewiesenen Korollar I.

(16+) erhält man sofort aus der Definition von $b \neg a$. Denn aus der Vorderformel $a \wedge c \leqq b$ von (16+) folgt $a' \vee (a \wedge c) \leqq a' \vee (a \wedge b)$ und damit wegen $b \neg a = a' \vee (a \wedge b)$ die Formel (16+).

Da somit die Relation $a \leqq b$ und die Operation $b \neg a$ in L_q alle Bedingungen erfüllen, die im Rahmen einer operativen Begründung der Quantenlogik von der Implikation bzw. Subjunktion verlangt werden müssen, läßt sich der Verband L_q hinsichtlich der Relation $a \leqq b$ und hinsichtlich der Operationen $a \wedge b$, $a \vee b$ und $b \neg a$ als ein Aussagenkalkül interpretieren.

Damit ist jedoch L_q zunächst nur als ein affirmativer quantenlogischer Aussagenkalkül interpretiert. Im Rahmen der operativen Quantenlogik kann man darüber hinaus die Negation einer Aussage a durch

$$\neg a \underset{\text{def}}{=} a \rightarrow \Lambda$$

definieren, also wegen (15), (16) und (17) durch die spezielle Subjunktion $\Lambda \neg a$. Auf Grund dieser Definition und wegen (15) gilt dann der Satz vom Widerspruch

$$a \wedge \neg a \rightarrow \Lambda\,, \tag{18}$$

jedoch läßt sich aus (15) und (16) weder der Satz von der doppelten Negation

$$\neg(\neg a) \Leftrightarrow a \tag{19}$$

noch das tertium non datur

$$\Lambda \rightarrow a \vee \neg a \tag{20}$$

herleiten***.

Entsprechend der oben erwähnten Möglichkeit, die in L_q definierte zweistellige Operation $b \neg a = a' \vee (a \wedge b)$ als Subjunktion zu interpretieren, kann man auf Grund der Definition der Negation die spezielle Operation $\boldsymbol{0} \neg a = \neg a$ als Negation einer Aussage a interpretieren. Auf Grund der expliziten Form von $b \neg a$ ist weiter

$$\neg a = \boldsymbol{0} \neg a = a' \vee (a \wedge \boldsymbol{0}) = a'$$

d.h. es gilt das

Korollar III:

In L_q ist die spezielle Operation $\neg a = \boldsymbol{0} \neg a$ gleich dem Orthokomplement a' von a.

In dem Verband L_q läßt sich daher das Orthokomplement a' als die Negation der Aussage a interpretieren. Über die für eine Negation notwendig geltenden Beziehungen hinaus gelten für das Orthokomplement a' wegen (1) und (3) aber auch die verbandstheoretischen Analoga von (19) und (20). Der Verband L_q läßt sich somit hinsichtlich der Relation $\leqq$ und der Operationen $\wedge$, $\vee$, $\neg$ als ein Aussagenkalkül im Sinne der effektiven Quantenlogik interpretieren, in dem jedoch auf Grund der speziellen Form der betrachteten Aussagen sogar die effektiv nicht beweisbaren Sätze (19) und (20) gelten. Im Sinne der *gewöhnlichen* Logik könnte daher L_q als ein Aussagenkalkül betrachtet werden.

Um jedoch den Verband L_q als einen quantenlogischen Aussagenkalkül deuten zu können, muß auch die für die Quantenlogik fundamentale Relation der Kommensurabilität, die für die gewöhnliche Logik irrelevant ist, in dem betreffenden Verband vorkommen. In der operativen Quantenlogik definiert man den Begriff der Kommensurabilität zweier Aussagen a und b durch

$$a \sim b \underset{\text{def}}{=} a \rightarrow (b \rightarrow a) \wedge b \rightarrow (a \rightarrow b) \tag{21}$$

und bezeichnet zwei Aussagen, für die (21) gilt, als kommensurabel[3]. Inhaltlich bedeutet diese Definition, daß man die zu den beiden Aussagen a und b gehörenden Messungen in beliebiger Reihenfolge hintereinander ausführen kann, ohne dadurch das Ergebnis der Messung zu beeinflussen (vgl. hierzu auch Ref.[10]).

Auf Grund der oben (Theorem III) behandelten Möglichkeit, die Relation $a \leqq b$ bzw. die Operation $b \neg a = a' \vee (a \wedge b)$ in L_q als Implikation bzw. Subjunktion zu interpretieren, kann man sofort eine

*** Die beiden Beziehungen (19) und (20) sind daher nicht notwendig mit dem Begriff der Negation verbunden. Sie können aber für spezielle Aussagensysteme, wie für das hier untersuchte System L_q quantenmechanischer Aussagen erfüllt sein.

[10] H. D. DOMBROWSKI, Archive for Rational Mechanics and Analysis **35**, 178 [1969].

verbandstheoretische Relation, nämlich

$$a \sim b \underset{\mathrm{def}}{=} a \leqq b' \vee (a \wedge b) \barwedge b \leqq a' \vee (a \wedge b) \qquad (22)$$

angeben, die sich als Kommensurabilität interpretieren läßt. (Dabei ist $\barwedge$ kein logisches, sondern ein metasprachliches Symbol).

Die in L_q definierte Relation (22), die sich im Sinn der operativen Quantenlogik als Kommensurabilität interpretieren läßt, ist identisch mit der oben in (6) definierten Relation K, d.h. es gilt das

Theorem IV

In L_q gilt: $\quad a \sim b \Leftrightarrow a K b.$

Beweis:

1. $\Rightarrow$ Wegen der zu (4) äquivalenten Beziehung (5^+) gilt in L_q

$$b = (a \wedge b) \vee (b \wedge (\neg a \vee \neg b)).$$

Gilt nun für a und b die Relation

$$a \leqq \neg b \vee (a \wedge b)$$

so ist

$$b \wedge (\neg a \vee \neg b) = \neg a \wedge b,$$

so daß

$$b = (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b)$$

folgt. Da wegen (7) die Relation K in L_q symmetrisch ist, gilt auch

$$a = (b \wedge a) \vee (\neg b \wedge a).$$

2. Aus $\quad a = (b \wedge a) \vee (\neg b \wedge a)$ folgt

$$a \leqq (b \wedge a) \vee (\neg b \wedge a) \leqq \neg b \vee (a \wedge b)$$

und aus der wegen (7) äquivalenten Relation

$$b = (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b)$$

entsprechend

$$b \leqq (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b) \leqq \neg a \vee (a \wedge b).$$

Nach Theorem II läßt sich in L_q die Relation $a K b$ als zweistellige Operation $a \circ b$ definieren. Auf Grund des Theorems IV bedeutet das, daß sich das in (13) definierte Verbandselement $a \circ b$ interpretieren läßt als diejenige Aussage, die genau dann wahr ist, wenn die Aussagen a und b kommensurabel sind. Dadurch wird es möglich, quantenlogische Sätze, in denen die Kommensurabilität zweier Aussagen in objektsprachlicher Form auftritt, verbandstheoretisch zu formulieren und zu beweisen. Insbesondere gilt das

Korollar IV:

In dem quantenlogischen Aussagenkalkül, der dem Verband L_q entspricht, gilt der Satz

$$a \wedge (a \circ b) \to a \neg b.$$

Beweis: Auf Grund von Korollar II gilt in L_q:

$$a \wedge (a \circ b) \leqq a \neg b,$$

woraus wegen Theorem IV der behauptete quantenlogische Satz folgt.

Auf Grund des Theorems IV läßt sich die in (6) definierte Relation $a K b$ bzw. die in (12) definierte Operation $a \circ b$ als Kommensurabilität im Sinne der operativen Quantenlogik interpretieren. Durch die Existenz des durch (12) bestimmten Verbandselementes $a \circ b$ ist sichergestellt, daß alle quantenlogischen Sätze, in denen die Kommensurabilität in objektsprachlicher Form auftritt, verbandstheoretisch formuliert werden können. Umgekehrt ist durch diese Zusammenhänge in Verbindung mit den oben gemachten Bemerkungen gezeigt, daß sich der Verband L_q als ein quantenlogisches Aussagenkalkül interpretieren läßt.